교육과정평가연구
The Journal of Curriculum and Evaluation
2023, Vol. 26, No. 3, pp. 269~294
DOI: https://doi.org/10.29221/jce.2023.26.3.269

행렬에 대한 예비교사들의 교과 내용 지식 분석

김연수 (전남대학교 교수)*
신보미 (전남대학교 교수)**

요약

2022 개정 수학과 교육과정은 미래 사회 대비를 위한 지능 정보 소양의 함양을 고려하여 고등학교 교육과정에 행렬을 신설하고, 그 교수-학습 목표로 다양한 사례를 통해 자료를 표현, 이해, 처리하는 도구로서 행렬의 활용 가능성과 유용성을 인식하도록 명시하였다. 수학 교사의 내용 지식은 수업의 설계 및 실행에 영향을 미치는 주요 요소 중 하나인바, 본 연구는 행렬에 대한 예비교사들의 SMK를 그 하위 요소인 SCK와 HCK에 주목하여 분석함으로써 2022 개정 수학과 교육과정에서 추구하는 행렬 교수-학습의 의도를 구현하는 데 필요한 교사 지식 개발에 시사점을 도출하였다.

본 연구에서 예비교사들은 여러 변수가 포함된 실생활 자료를 행렬로 표현 및 처리하거나 그 교수학적 의의를 인식하는 데 제한적인 SCK를 보였으며, 행렬과 그 연산이 지닌 수학적 사고의 본질을 파악하거나 행렬의 곱셈을 목적이 있는 수학적 탐구 활동의 성과로 보는 HCK에 한계가 있었다. 이는 2022 개정 수학과 교육과정이 명시한 행렬 교수-학습의 목표를 구현할 예비교사들의 SCK와 HCK의 개발이 시급함을 보여준다. 대학의 교사 교육과정에서 수학 내외적 맥락의 자료를 표현 및 처리하는 도구로 행렬과 그 연산의 의미를 강조하여 다룰 필요가 있으며, 이들에 내재한 수학적 사고의 본질이 명시적으로 논의되는 교수학적 방안이 모색되어야 한다.

주제어: 행렬 교수-학습, 교과 내용 지식(SMK), 전문화된 내용 지식(SCK), 수학적 식견으로서의 지식(HCK), 2022 개정 수학과 교육과정

* 제1저자, ykim@jnu.ac.kr
** 교신저자, bomi0210@jnu.ac.kr

I. 서 론

최근 들어 행렬은 미래 사회와 산업의 변화를 고려하여 학교 수학에서 다룰 필요가 있는 내용 중 하나로 주목받고 있다(이상구 외, 2020; 허남구, 2020). 이에 2022 개정 수학과 교육과정은 〈공통수학1〉에 '행렬'을, 〈경제수학〉에 '행렬과 경제'를 신설하였다. 이전 교육과정에서 행렬은 그 대수적 구조가 지닌 독특한 성질에 기초한 계산 위주의 교수-학습으로 인해 행렬 학습의 교육적 의의가 드러나지 않는다는 비판을 받았으며, 2009 개정 교육과정 이후 일반과목에서 삭제되었다(신이섭 외, 2011). 이는 2022 개정 수학과 교육과정에 새로이 도입된 행렬 교수-학습에는 과거와 다른 접근이 필요함을 시사한다.

행렬은 대수, 기하, 통계뿐 아니라 물리, 경제, 공학 등 수학 외의 분야에서도 여러 값이 포함된 자료를 효율적으로 다루는 도구로 활용된다. 교육부(2022)는 〈공통수학1〉의 행렬 단원에서 실생활 상황을 비롯한 다양한 사례를 행렬로 단순화하여 표현하고 행렬을 활용하는 자료의 표현, 이해, 처리 과정을 경험하도록 명시하여, 수학 내외적 맥락의 자료를 다루는 수학적 도구로서 행렬의 의미를 강조하였다. 이에 이경화, 김하림, 이송희(2022)는 삶과 연계된 교육 및 디지털 전환의 시대에 필요한 소양 함양을 강조하는 2022 개정 교육과정의 입장(교육부, 2021)에 비추어 수학적 모델로서 행렬이 지닌 잠재성과 유용성이 드러나도록 교과서를 구성하는 방안에 대해 제안하였다.

그러나 행렬은 최근 10여년동안 학교 수학을 통해 주요 내용 요소로 지도된 사례를 찾기가 쉽지 않다. 또한 수학교사 중 상당수는 수업을 통해 행렬의 의미를 구체적으로 지도한 경험이 없거나 중·고등학교에서도 이를 배운 적이 없으며, 행렬 교수-학습과 관련된 근래 수학교육 연구도 많지 않은 실정이다.[1] 2022 개정 고등학교 교육과정에 신설된 행렬이 교육과정의 의도에 비추어 의미 있게 다루어지려면 이와 관련되는 행렬 교수-학습의 쟁점 및 교사 지식의 특징에 대한 본격적인 논의가 필요하다.

교사 지식은 학생의 수학 학습에 영향을 미치는 핵심 요소이다(Magiera, van den Kieboom, & Moyer, 2011). Shulman(1986)이 교사 지식의 중요성에 주목한 이래 Ball, Thames, & Phelps(2008)는 '수학 교수를 위한 지식(mathematical knowledge for teaching, 이하 MKT)'을 '교수학적 내용 지식(pedagogical content knowledge, 이하 PCK)'과 '교과 내용 지식(subject matter knowledge, 이하 SMK)'으로 구분하고 그 하위 요소를 상세화하여 수학교사 지식과 관련된 다양한 연구에 기여하였다. 국내에서도 여러 연구가 MKT를 통해 수학교사 지식의 특징을 분석하여 교사 전문성 개발을 위한 시사점을 기술하였다. 그러나 이러한 연구 대부분이 PCK를 SMK보다 주로 다루어 우리나라 교사들의 MKT에 대한 특징을 충분히 파악하는 데 한계가 있다(송근영, 방정숙, 2013).

Ball 외(2008)에 따르면 SMK는 교사가 교육과정을 해석하여 수업에서 다룰 과제의 유형을 결정하거나 수학 개념을 학생에게 설명하는 방식을 구체화하는 데 핵심 역할을 한다. 2022 개정 수학과 교육

---

1) 학술연구정보서비스(www.riss.kr/)에서 수학교육 관련 등재(후보) 학술지에 실린 논문을 주제어 '행렬'로 검색하여 행렬 교수-학습을 다룬 연구를 선별하면 총 13편의 결과를 얻을 수 있다. 이 중에서 11편이 2012년 이전에 출판된 논문이다.

과정에서 의도한 행렬 교수-학습의 방향이 수업을 통해 구현되는 데는 이를 실행에 옮길 교사들의 SMK가 주요하고 볼 수 있다. 특히 현재 양성과정에 있는 예비교사들은 학교 수학에서 행렬을 학습한 경험이 없으며 대학의 선형대수를 통해 행렬을 처음 접하였으므로, 가르칠 지식인 행렬에 대해 예비교사들이 지닌 SMK의 특징을 탐색함으로써 행렬에 대한 교수-학습의 양상을 예측하거나 이와 관련된 교사 전문성 개발을 모색하는 데 의미 있는 정보를 얻을 수 있다.

권오남, 김아미, 조형미(2012)는 수학교사 양성을 위한 교육과정이 일반대학 수학과의 교육과정과 거의 유사하여 학교 현장과 괴리가 크다고 비판하였다. Klein(1932)에 따르면 대학에 입학한 예비교사는 학교 수학과는 다른 특징의 대학 수학을 배우면서 단절을 느끼며 교사가 되어 대학 수학과 전혀 다른 학교 수학을 가르치면서 또다시 단절을 겪는바, 이러한 이중 단절(double discontinuity) 문제는 우리나라 수학교사 양성과정에도 여전히 존재한다(박경미, 2009). 대학의 양성과정을 통해 예비교사들은 순수 수학에 대한 학문적이면서도 교육적인 이해와 안목을 토대로 학교 수학의 내용 요소가 지닌 수학적 아이디어를 가르칠 지식으로 변환하거나 이를 교수학적으로 확장하여 폭넓은 수학적 상황을 다루는 역량을 개발할 필요가 있다(김래영, 김은현, 2017).

이에 본 연구는 행렬에 대해 예비교사들이 지닌 SMK의 특징을 분석하여 대학 수학의 선형대수에서 다룬 행렬의 의미와 학교 수학에 새롭게 도입된 행렬에 대한 교수-학습의 실제를 연결 짓는 교사 교육과정의 설계와 실행에 구체적인 시사를 얻는 데 목표를 둔다. 이를 위해 수학교사 지식과 SMK, 행렬 교수-학습을 다룬 선행 연구를 검토하여 SMK의 하위 요소가 지닌 의미와 역할을 살펴보고 행렬과 그 연산의 발생적 본질과 교수학적 의의를 확인한다. 이로부터 행렬에 대한 예비교사들의 SMK 특징을 드러낼 하위 범주와 행렬 교수-학습 관련 쟁점을 추출하고 그 분석관점을 상세화한다. 이를 기반으로 행렬에 대해 예비교사들이 지닌 SMK의 특징을 알아보기 위한 지필 검사 도구를 구체화하고[2] 지필 검사에서 예비교사들이 제시한 답변을 앞서 추출한 행렬 관련 쟁점 및 분석관점, 선행 연구에 비추어 분석한다. 본 연구의 결과는 수학 내외적 대상을 간단히 하는 도구로서 행렬과 그 연산이 지닌 의미 및 그 이면의 사고를 다루기 위해 주목할 필요가 있는 교수학적 쟁점을 확인하는 데도 간접적으로 기여할 수 있다.

II. 이론적 배경

1. 수학교사 지식과 SMK

교사의 수학 지식은 수학교육 전반에 강력한 영향을 미친다. Ma(1996)에 따르면 교과 내용과 관련되는 교사 지식은 수업을 설계하고 실행할 때, 특히 수업 방법을 구체화하는 데 결정적인 토대가 된다.

2) 방정숙, 선우진(2014)에 따르면 지필 검사에 의한 자료 수집이 국내 수학 교육 연구에서 교사 지식의 특징을 살피는 데 가장 폭넓게 사용되는 방법이다.

교과 내용 지식에 대한 교사의 혼돈은 학생들에게 전달되어 학생들도 비슷한 혼란을 겪게 할 수 있지만(Levenson, 2012), 풍부한 내용 지식을 지닌 교사는 개념적으로 연결된 다양한 표상을 통해 수학적으로 의미 있는 수업을 진행한다(Turner & Rowland, 2011).

Shulman(1986)에 따르면 교사의 내용 지식은 가르칠 교과의 주요 개념 및 내용, 이론 등을 그저 아는 것에 머무르지 않고 특정 주제가 교과 내에서 핵심적인 이유를 이해하여 이를 적절히 조직하거나 교과에서 다루는 주요 모델이 성립하는 타당한 근거를 밝힐 수 있는 지식을 이른다. Ball 외(2008)는 Shulman(1986)에 비추어 수학교사의 SMK를 일반 내용 지식(common content knowledge, 이하 CCK), 전문화된 내용 지식(specialized content knowledge, 이하 SCK), 수학적 식견으로서의 지식(horizon content knowledge, 이하 HCK)으로 정교화하였다.

CCK는 수학 교사뿐 아니라 수학을 알고 활용하는 전문가가 지닌 수학에 대한 일반 지식을 이른다. 반면 SCK는 학생을 가르치는 데 필요한 수학 지식으로 교수 상황이 아니라면 주목받지 않을 지식을 의미한다. 예를 들어, 분수의 나눗셈을 역수의 곱셈으로 해결하는 이유는 수학교사에게는 필수 지식이지만 수학을 활용하는 다른 직업군에게는 그렇지 않을 수 있다(Ball et al., 2008). SCK는 수학의 규칙과 절차가 지닌 의미를 인식하여 이를 개념적으로 설명하거나 학생들이 제기한 의문에 수학적으로 의미 있는 답을 제공할 때, 수학적 아이디어를 정확히 표상하거나 표상과 표상 사이를 연결하여 다룰 때 필요한 지식이다(Ball, Hill, & Bass, 2005).

Ball 외(2008)에 따르면 교사는 SCK를 통해 학생의 오류 유형과 원인을 수학적으로 다룰 수 있다. SCK는 학생의 답변을 수학적으로 해석하여 타당성을 평가하고 오류가 생긴 수학적 단계를 확인하는 데 작동하므로 교사가 발견한 오류의 원인은 전적으로 수학 내용과 연관된다. SCK는 학생이 자신의 오류를 수학적 관점에서 탐구하도록 안내하는 데 기여한다는 점에서 수학교사 지식으로서 주요한 가치를 지닌다(Ding, 2008).

한편 HCK는 가르칠 수학을 넘어서는 폭넓은 수학적 상황과 관련되는 지식으로, 교사 자신이 수학적인 활동을 수행하는 과정에서 얻게 되는 지식을 말한다(Ball & Bass, 2009). Ball & Bass(2009)에 따르면 교사는 대학 수학을 통해 학문적인 수학의 구조와 관행을 경험함으로써 학교 수학을 조망할 수 있게 되므로, HCK는 이중 단절을 극복하기 위해 수학교사에게 요구되는 “학교 수학에 대한 높은 수준의 이해”(Klein, 1932)와 밀접한 연관이 있다.

Vale, McAndrew, & Krishnam(2011)은 HCK를 SMK의 중심에 두고 수학교사 교육의 목적은 HCK의 개발에 있다고 강조하였다. Vale 외(2011)는 교사가 대학에서 배운 귀류법에 비추어 학생의 무리수에 대한 설명을 해석하는 과정을 HCK가 드러난 사례로 설명하면서 HCK의 의미를 대학 수학과 관련하여 구체화하였다. Montes, Ribeiro, Carrillo, & Kilpatrick(2016)에 따르면 “학교 수학에 대한 높은 수준의 이해”는 수학의 개념, 절차, 성질 등을 연결하여 파악할 때 얻어지므로 HCK는 연결성과 관련된 수학적 사고와도 연관된다. HCK가 풍부한 교사는 예상치 못한 학생의 질문이나 의견에 적절히 대처하여 수학적인 의미를 부여할 수 있으며(Mellone, Jakobsen, & Ribeiro, 2015), 계획한 수업 목표를 학생의 요구에 따라 유연하게 변화시킬 수도 있다(Zazkis & Marmur, 2018).

이상에 따르면 SCK는 교수 활동을 전제로 하는 교과 내용 지식이므로 수학교사 지식의 고유성이 이로부터 드러난다(Ball et al., 2008). 교사는 SCK를 통해 학생의 이해를 수학적으로 해석하여 평가

하고 학생의 탐구 활동이 의미 있게 수행되도록 유도한다. HCK는 교사가 학문적 수학을 접함으로써 학교 수학을 폭넓은 견지에서 조망하게 되는 지식이므로, 수학교사의 이중 단절 문제 해결에 주요한 역할을 하며 학생의 예상치 못한 질문을 유연하게 다루는 데도 기여한다. 이에 본 연구는 예비교사들의 행렬에 대한 SMK를 SCK와 HCK의 측면에서 분석하여 2022 개정 고등학교 교육과정을 통해 자료를 표현 및 처리하는 도구로 행렬을 지도하는 교수-학습에서 학생의 탐구 활동과 반응을 수학적으로 의미 있고 유연하게 안내하는 교사 역량을 개발하는 데 유용한 정보를 얻고자 한다.

2. 행렬 교수-학습

선형대수는 대학의 기초 과목으로 이공 계열뿐 아니라 인문사회 계열에서도 폭넓게 지도된다(조성민, 2009). 이러한 선형대수의 핵심 개념인 행렬은 다양한 사회 현상을 표현하는 데 유용하며 수학의 여러 분야에서 주요한 탐구 도구로 활용되는바 그 교육적 가치가 높다(박경미 외, 2015). 학교 수학에서 행렬은 3차 교육과정부터 2007 개정 교육과정까지 고등학생 대부분이 학습하는 내용 요소로 다루어졌다. 고등학교에서 행렬은 전통적으로 행렬의 뜻과 연산이 설명된 다음, 연립일차방정식, 일차변환, 그래프 등과 관련하여 그 활용 사례가 소개되는 방식으로 지도되었다. 그러나 행렬 교수-학습을 다룬 여러 연구는 이러한 전개의 문제점을 행렬의 곱셈 지도와 관련하여 지적하면서 행렬 개념의 발생적 본질에 따른 교수학적 대안을 제시하였다.

신보미, 박종률, 임재훈(2000)은 행렬의 곱셈에서 교환법칙이 성립하지 않는다는 사실은 고등학교의 주요 내용 요소이지만, 행렬의 곱셈이 특수하게 정의되는 이유를 살펴볼 기회는 제공되지 않은 채 그 계산을 정확히 수행하는 데만 주목하여 행렬 교수-학습이 진행되는 것을 비판하였다. 신보미 외(2000)에 따르면 이러한 지도 방식은 수학적 연결성 및 사고 교육에 바람직하지 않은바, 행렬의 발생적 본질에 비추어 함수적 관점에서 행렬과 그 연산을 도입하면 행렬의 곱셈이 정의되는 필연적인 맥락을 다룰 수 있으며 교환법칙이 성립하지 않는 이유도 함수의 합성이 지닌 비가환성의 연장선에서 설명할 수 있다.

Dorier(2002)에 따르면 역사적으로 행렬 개념은 연립일차방정식의 문제 상황을 단순화하는 도구로 19세기에 등장하였으며, 캐일리(Cayley)가 1848년 논문에서 선형변환에 관한 이론을 설명하면서 행렬 대수를 고안하였다. 이에 비추어 조성민(2009)은 학교 수학에서 행렬을 연립일차방정식과 관련하여 도입하고 행렬의 연산, 특히 행렬의 곱셈은 일차변환의 합성으로 정의하는 방안을 제시하였으며, 이를 통해 행렬이 지닌 수학적 아이디어 및 다른 수학 개념과의 연결성을 명확히 할 수 있다고 강조하였다.

정영우, 김부윤, 황종철, 김소영(2011)은 이미 밝혀진 집합의 구조를 새로운 집합으로 옮기는 대수적 도구로서 일대일 대응의 의미를 해석하고, 이를 통해 선형변환과 행렬의 벡터공간이 구조적으로 동일함을 설명하였다. 선형대수의 관점에서 두 공간은 서로 동형이므로 선형변환의 합성과 행렬의 곱셈은 그 수학적 의미가 같다. 정영우 외(2011)에 따르면 행렬의 곱셈에 대한 이러한 설명을 학생들에게 직접 제시하지는 못하더라도 교사 스스로 이를 검토하고 이해함으로써 행렬의 곱셈 정의가 특정 목적

을 가진 수학적 탐구 활동의 결과임을 인식하여 가르칠 지식인 행렬에 대한 교사 전문성을 제고할 수 있다.

한편 2022 개정 수학과 교육과정은 미래 사회 대비를 위한 필수 학습 요소로 행렬을 설정하고 고등학교 수학에 이를 도입하였다. 특히 <공통수학1>에서 행렬 교수-학습의 목표는 다양한 사례를 통해 자료를 표현, 이해, 처리하는 과정을 다루어 행렬의 활용 가능성과 유용성을 인식하도록 하는 데 있다(이경화 외, 2022). 허남구(2020)에 따르면 여러 변수가 포함된 자료를 표현 및 처리하는 도구인 행렬의 유용성이 디지털·인공지능 시대의 도래로 최근 부각되고 있다. 행렬을 통해 많은 변수를 하나의 기호로 표현할 수 있으며, 행렬의 연산이 지닌 고유한 특징을 활용하면 자료 처리를 간편하게 수행할 수 있기 때문이다(권현경, 2007). 그러나 이러한 행렬의 가치는 그 계산이나 대수적 구조와 관련된 복잡한 내용을 다룰 때는 거의 드러나지 않는다(교육부, 2022). 미래 사회를 대비하는 행렬 교수-학습은 자료 표현 및 처리에서 행렬이 어떻게 활용되는지를 구체적으로 경험할 수 있는 문제 중심 학습이나 수학적 모델링 활동에 주목할 필요가 있다(김홍겸, 2021).

이경화, 김하림, 이송희(2022)는 국외 교과서 분석을 통해 고등학교 교육과정에 새로이 도입된 행렬 교수-학습의 방향을 제안하였다. 이들은 과거 행렬을 교육과정에서 삭제한 배경이 된 복잡한 계산 및 대수적 구조 위주의 행렬 지도에서 벗어나, 개념적 이해와 협력적 탐구 중심의 학습 소재로 행렬을 다룰 필요가 있으며 행렬이 지닌 수학적 모델로서의 잠재성이 드러나도록 교수-학습이 이루어져야 한다고 강조하였다.

이상에 따르면 학문적 지식으로서 행렬은 연립일차방정식이나 선형변환과 같은 수학적 대상을 간단히 표현하는 도구로 발명되었으며, 선형대수의 관점에서 행렬의 곱셈은 선형변환의 합성과 같은 개념이다. 행렬의 곱셈과 선형변환의 합성 간에 존재하는 이상과 같은 관계를 파악하여 행렬의 곱셈 정의를 필연적인 탐구 활동의 결과로 인식하는 것은 학교 수학의 내용 요소인 행렬을 그 발생적 본질과 학문적 수학의 견지에서 조망하는 지식과 관련되는바, 이를 통해 예비교사들의 행렬에 대한 HCK를 살펴볼 수 있다.

한편 디지털·인공지능 시대에 행렬은 수학 내외적 자료를 다루는 유용한 도구로 주목받고 있다. 2022 개정 고등학교 교육과정은 여러 변수가 포함된 자료를 표현하고 처리하는 도구로 행렬의 의미를 드러내는 교수-학습을 의도하였으며, 이는 행렬을 활용하는 수학적 모델링 문제 해결 학습을 통해 구현될 수 있다. 이를 위해 교사는 여러 변수가 포함된 실생활 맥락의 표와 자료를 행렬로 나타내어 자료를 처리하는 수학적 아이디어를 행렬의 연산으로 표상할 수 있어야 하며, 이러한 일련의 과정을 통해 행렬과 그 곱셈을 개념적으로 활용함으로써 행렬 교수-학습에 실생활 모델링 과제가 갖는 의의도 파악할 수 있어야 한다. 행렬을 이처럼 수학적 모델로 다루는 교사 지식은 다양한 자료를 표현, 이해, 처리하는 도구로 행렬을 지도하는 교수 활동에 전문화된 지식인바, 이를 통해 예비교사들의 행렬에 대한 SCK의 특징을 확인할 수 있다.

이에 본 연구는 행렬에 대한 예비교사들의 SCK와 HCK 분석관점을 행렬 교수-학습과 관련된 이상과 같은 쟁점에 비추어 <표 1>과 같이 상세화한다.

〈표 1〉 행렬에 대한 예비교사들의 SCK와 HCK 분석관점

범주	행렬 교수-학습 관련 쟁점	분석관점	코드
행렬에 대한 SCK	행렬을 활용하는 수학적 모델링	실생활 맥락의 표와 자료를 어떻게 행렬로 표상하는가?	S1
		행렬의 곱셈을 이용하여 어떻게 자료를 처리하는가?	S2
		실생활 맥락의 과제가 지닌 행렬 교수-학습의 의의를 어떻게 인식하는가?	S3
행렬에 대한 HCK	행렬의 곱셈 정의	행렬의 곱셈이 특정한 방식으로 정의되는 이유를 어떻게 설명하는가?	H1
		행렬의 곱셈 정의를 목적이 있는 수학적 탐구 활동의 결과로 인식하는가?	H2
		행렬과 그 연산이 지닌 수학적 의미를 인식하는가?	H3

III. 연구 방법

1. 지필 검사 도구

행렬에 대한 예비교사들의 SCK와 HCK의 특징을 분석하기 위한 지필 검사 문항은 〈표 1〉에 비추어 각각 수학적 모델링 과제에 행렬을 활용하는 상황(문항 1, 2)과 행렬의 곱셈이 정의되는 이유를 논하는 상황(문항 3, 4)을 통해 구체화하였다.[3)]

문항 1은 이경화, 김하림, 이송희(2022)가 행렬을 활용하는 모델링 과제의 예로 싱가포르 교과서에서 발췌한 것이다. 이들에 따르면 우리나라 교육과정이 주목하는 2×2 행렬만으로는 행렬을 활용한 수학적 모델링을 충분히 다루기가 어렵다. 국외 교과서는 다양한 크기의 행렬을 통해 수학적 모델링 과정을 소개하며, 공학 도구를 적극적으로 활용하도록 안내한다. 특히 실생활 자료의 표현 및 처리 수단으로 행렬의 의미를 강조하는 싱가포르와 호주 교과서는 행 행렬(row matrix)과 열 행렬(column matrix)을 학습 요소로 삼아 문제에서 요구하는 새로운 정보를 생성하는 데 어려움이 없도록 한다. 이에 문항 1은 2022 개정 교육과정의 의도에 따라 자료를 표현 및 처리하는 도구로 행렬을 다루는 교수 활동과 관련하여 예비교사들이 지닌 SCK의 특징을 살피는 데 적합하다. 문항 1을 통해 예비교사들이 실생활 맥락의 표와 자료를 어떻게 행렬로 표상하며(S1), 행렬의 곱셈을 이용하여 자료를 어떻게 처리하는지(S2) 살펴볼 수 있다. 문항 2에는 문항 1과 같은 실생활 모델링 과제가 행렬 교수-학습에서 갖는 의의를 예비교사들이 인식할 수 있는지(S3) 알아보려는 의도가 있다.

문항 3은 학생이 행렬의 곱셈을 특정 방식으로 정의하는 이유에 대해 묻는 수업 상황을 배경으로 한다.[4)] Watson, Beswick, & Brown(2006; 양선아, 이수진, 2019)에 따르면 수학교사 지식은 가르치는 맥락에서 의미가 드러나는 실행 지식이므로, 수업에서 학생이 제기한 질문에 어떻게 답하겠는지를 묻는 지필 검사 문항에 의해 그 특징을 효과적으로 파악할 수 있으며 대학 수학에 대한 교사들의 이해

3) 지필 검사 도구의 세부 내용은 〈부록〉을 참조하기 바란다.
4) 이 수업 상황은 본 연구자 중 한 명이 실제 고등학교 수업에서 겪은 사례이다.

양상도 구체적으로 확인할 수 있다. 이에 본 연구는 문항 3을 통해 행렬의 곱셈이 정의된 이유를 예비교사들이 어떻게 설명하며(H1), 행렬의 곱셈 정의를 목적이 있는 탐구 활동의 결과로 인식하는지(H2) 살펴봄으로써 행렬과 그 곱셈의 수학적 의미와 사고의 본질에 대한 예비교사들의 HCK 특징을 기술하고자 한다. 문항 4는 문항 3에서의 답변이 예비교사 자신의 수학적 이해와 다를 경우를 감안하여 수학 전공자에게는 어떻게 설명하겠는지 물음으로써 행렬의 곱셈에 대한 예비교사들의 인식이 좀 더 직접적으로 드러나도록 하였다(H3).

2. 분석 방법

본 연구는 앞서와 같이 구체화한 검사 도구를 활용하여 **시 소재 수학교육과 3학년 34명[5]을 대상으로 약 1시간에 걸쳐 지필 검사를 실시하였다. 지필 검사를 통해 수집한 예비교사들의 답변 자료는 <표 1> 및 검사 문항 개발 의도에 비추어 유형별로 범주화하고 각 범주에 속하는 예비교사들의 인원수를 파악하는 방식으로 다음과 같이 정리하였다.

문항 1의 답변은 행렬의 곱셈을 이용하여 '자료를 모두 처리한 경우'(범주Ⅰ), '일부 자료만 처리한 경우'(범주Ⅱ), '행렬의 곱셈을 오용한 경우'(범주Ⅲ), '행렬을 이용하지 않은 경우'(범주Ⅳ)로 분류하고 구체적인 답변 내용을 세분하여 정리하였다. 문항 2의 답변은 그 개발 의도에 비추어 문항 1이 지닌 행렬 교수-학습의 '의의를 설명한 경우'와 '한계를 설명한 경우'로 구분하고, 이를 문항 1에 대한 답변 범주의 세부 내용별로 정리하여 문항 1과 문항 2의 답변 유형 간 관계를 간접적으로 살펴보았다. 문항 3의 답변은 학생에게 제시하는 설명이 '행렬의 곱셈 정의와 무관한 경우'(범주Ⅰ), '행렬의 곱셈 정의 조건과 관련된 경우'(범주Ⅱ), '행렬의 크기와 관련된 경우(범주Ⅲ)'로 분류하여 그 답변 내용을 정리하였다. 문항 4의 답변은 문항 3에 대한 답변 범주의 세부 내용에 따라 분류하되, 문항 3의 답변에 없는 '연립방정식' 또는 '선형변환'과 관련된 설명을 추가하여 정리하였다. 이는 문항 4의 개발 의도에 비추어 문항 3과 문항 4의 답변 유형간 관계를 살펴보기 위함이다.

이상과 같이 정리한 결과에 따라 예비교사들이 작성한 구체적인 답변을 분석하는 과정에는 본 연구자들과 수학교육 전공 박사 과정에 있는 현직 교사 2명이 참여하였다. 이들은 <표 1>의 분석관점 및 검사 도구 개발 의도, 관련 선행 연구에 비추어 개별적으로 자료를 분석하였으며, 개별 분석 과정에서 분석자들 간에 차이가 발생한 부분은 4회에 걸친 공동 논의를 통해 수정 및 조정하여 최종 결과를 도출하였다.[6]

---

5) 이들은 선형대수Ⅰ, Ⅱ와 수학교육론을 이수하였으며, 수학교재연구및지도법 강좌를 수강하고 있었다.

6) 이하에서는 지면상의 제약을 감안하여 예비교사의 답변을 정리하고 분석한 본 연구자들과 교사 2명의 작업 과정 낱낱을 기술하는 대신, 최종 결과에서 드러난 예비교사들의 행렬에 대한 SMK의 주요 특징에 중점을 두어 설명하고자 한다.

IV. 연구 결과

앞서 제시한 방법에 따라 지필 검사 문항에 대한 예비교사들의 답변을 범주화하여 정리한 결과를 요약하면 각각 〈표 2〉, 〈표 3〉과 같다.

〈표 2〉 문항 1, 2에 대한 예비교사들의 답변 요약

	범주		인원수	세부 내용	문항 2 답변7)		
					의의	한계	무응답
문항 1 답변	I	행렬의 곱셈을 이용하여 자료를 모두 처리	3	$\left\{\begin{pmatrix}14 & 16 & 18\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1.2 & 0 & 1.4 & 2.6 & 5.2\\ 0 & 1.6 & 1.6 & 2.8 & 4.7\\ 1.4 & 1.8 & 0 & 3 & 4.4\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}12500\\ 5200\\ 7800\\ 1400\\ 1100\end{pmatrix}$	3	3	
			2	$\begin{pmatrix}12500 & 5200 & 7800 & 1400 & 1100\end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix}1.2 & 0 & 1.4\\ 0 & 1.6 & 1.8\\ 1.4 & 1.6 & 0\\ 2.6 & 2.8 & 3\\ 5.2 & 4.7 & 4.4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}14\\ 16\\ 18\end{pmatrix}\right\}$	1	1	1
	II	행렬의 곱셈을 이용하여 일부 자료만 처리	3	$\begin{pmatrix}1.2 & 0 & 1.4\\ 0 & 1.6 & 1.8\\ 1.4 & 1.6 & 0\\ 2.6 & 2.8 & 3\\ 5.2 & 4.7 & 4.4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}14\\ 16\\ 18\end{pmatrix}$		3	
	III	행렬의 곱셈 오용	8	곱셈이 정의되지 않음		8	
			4	행의 실수배로 계산		4	
			2	대응하는 성분의 곱으로 계산		1	1
			2	2×2 행렬 이용			2
	IV	행렬 이용하지 않음	10	-		8	2

〈표 3〉 문항 3, 4에 대한 예비교사들의 답변 요약

	범주		인원수	세부 내용	문항 4 답변					
					①	②	③	연립 방정식	선형 변환	무응답
문항 3 답변	I	행렬의 곱셈 정의와 무관	8	① 정의는 약속이므로 외워야 한다.	3				1	4
	II	행렬의 곱셈 정의 조건	5	② 앞 행렬의 열과 뒤 행렬의 행의 개수가 같을 때 정의할 수 있다.	2	1				2
	III	행렬의 크기	8	③ 학생 A처럼 하면 행렬의 크기가 다를 때 곱셈을 정의할 수 없다.	3		4		1	
		무응답	13	-				2		11

〈표 2〉, 〈표 3〉으로부터 드러난 예비교사들의 행렬에 대한 SMK 특징은 다음과 같이 5가지로 요약할 수 있다.

7) 문항 1이 행렬 교수-학습에서 갖는 의의와 한계를 예비교사 1명이 모두 기술한 경우에는 문항 2의 답변 범주인 '의의'와 '한계'에 각각 1명으로 표시하였다. 이에 문항 2의 답변 인원수는 연구대상 전체 인원수인 34를 넘어선다.

* 열 행렬과의 곱셈이 정의되도록 실생활 맥락의 표에 대한 행렬 표상을 조정한다(S1).
* 행렬의 곱셈을 이용하여 실생활 맥락의 자료를 처리하는 데 한계가 있으며(S2), 그 교수-학습 의의를 인식하지 못한다(S3).
* 행렬의 곱셈이 정의되는 이유를 행렬의 곱셈이 정의되는 조건이나 행렬의 크기에 비추어 설명한다(H1).
* 행렬의 곱셈 정의를 단순히 약속이라고 생각한다(H2).
* 일부 예비교사는 행렬과 그 연산이 지닌 수학적 의미를 연립방정식, 선형변환과 관련하여 인식한다(H3).

이하에서는 지필 검사 문항에 대한 답변을 〈표 1〉에 비추어 분석한 결과를 위 특징과 관련하여 상술함으로써 행렬에 대해 예비교사들이 지닌 SCK와 HCK의 양상을 설명한다. 이를 통해 2022 개정 수학과 교육과정의 의도에 따라 자료를 표현, 이해, 처리하는 도구로 행렬을 다루는 수업을 실행하는 데 필요한 교사 지식에의 시사점을 도출한다. 또한 행렬 교수-학습에서 수학 내외적 대상을 간단히 하는 도구로서 행렬과 그 곱셈이 지닌 의미와 이면의 사고를 다루기 위해 주목해야 하는 교수학적 쟁점도 간접적으로 살펴본다.

1. 행렬에 대한 예비교사들의 SCK

가. 열 행렬과의 곱셈이 정의되도록 실생활 맥락의 표에 대한 행렬 표상을 조정한다.

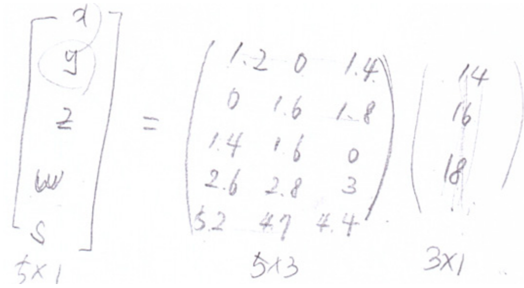
Ball 외(2005)에 따르면 수학교사의 SCK는 수학적 아이디어를 표상하거나 여러 표상을 연결 지어 다루는 데 주요하게 작용한다. 문항 1의 범주 Ⅰ에 속한 예비교사 중 3명은 식재료의 전체 양을 구하기 위해 실생활 맥락의 표를 $P=\begin{pmatrix} 1.2 & 0 & 1.4 & 2.6 & 5.2 \\ 0 & 1.6 & 1.6 & 2.8 & 4.7 \\ 1.4 & 1.8 & 0 & 3 & 4.4 \end{pmatrix}$과 같이 행렬로 표상하고, 인분과 관련된 자료는 행 행렬 $Q=(14\ \ 16\ \ 18)$로 표현하여 아래 ㉠처럼 간단히 처리하였다

$$QP=(14\ \ 16\ \ 18)\begin{pmatrix} 1.2 & 0 & 1.4 & 2.6 & 5.2 \\ 0 & 1.6 & 1.6 & 2.8 & 4.7 \\ 1.4 & 1.8 & 0 & 3 & 4.4 \end{pmatrix} \cdots ㉠$$

또한 식재료를 준비하는 전체 비용은 각 재료의 가격을 열 행렬 $R=\begin{pmatrix} 12500 \\ 5200 \\ 7800 \\ 1400 \\ 1100 \end{pmatrix}$로 표상하고 이를 ㉠의 오른쪽에 곱하여 $(QP)R$로 바람직하게 구하였다.[8] 이처럼 범주 Ⅰ의 예비교사 3명은 여러 변수가 포함된 실생활의 표 자료를 행렬로 간단하게 표현한 다음 이를 처리하는 수학적 아이디어를 행렬의 곱셈으로 적절히 표상하여(S1), 문제에서 요구하는 새로운 정보를 효과적으로 산출하였다.

8) 해당 내용과 관련된 예비교사의 구체적인 답변은 [그림 4]를 참조하기 바란다.

그러나 문항 1에 대해 범주 Ⅰ의 예비교사 2명과 범주 Ⅱ의 예비교사 3명은 식재료의 전체 양을 구하기 위해 인분에 대한 자료를 [그림 1]과 같이 열 행렬 $\begin{pmatrix} 14 \\ 16 \\ 18 \end{pmatrix}$로 표현하고, 열 행렬과의 곱셈이 정의되도록 문제에 주어진 표의 구조를 일부러 조정하여 $\begin{pmatrix} 1.2 & 0 & 1.4 \\ 0 & 1.6 & 1.8 \\ 1.4 & 1.6 & 0 \\ 2.6 & 2.8 & 3 \\ 5.2 & 4.7 & 4.4 \end{pmatrix}$로 표상하였다(S1).



[그림 1] 열 행렬과의 곱셈이 정의되도록 표의 행렬 표상을 조정한 예비교사 답변 사례

[그림 1]에서 $\begin{pmatrix} 1.2 & 0 & 1.4 \\ 0 & 1.6 & 1.8 \\ 1.4 & 1.6 & 0 \\ 2.6 & 2.8 & 3 \\ 5.2 & 4.7 & 4.4 \end{pmatrix}$는 열 행렬$\begin{pmatrix} 14 \\ 16 \\ 18 \end{pmatrix}$이 오른쪽에 곱해질 수 있도록 문제에 주어진 표의 행과 열을 바꾸어 표상한 것으로, 표를 문제에서 주어진 대로 행렬로 표현하여 자료를 간단하게 처리한 ㉠에 비해 복잡한 해결 방식이다. 이는 문항 1에서 점심 특선 메뉴에 쓰이는 식재료의 양과 같이 일정하게 고정된 자료를 표현하는 행렬은 A로, 인분처럼 상황에 따라 변하는 자료는 보통 열 행렬 X로 표현하고 이를 행렬 A의 오른쪽에 곱하여 새로운 정보에 대한 행렬 Y을 $Y=AX$로 나타내는 선형대수의 전개를 반영한 자료 처리 방식으로 볼 수 있다. 이러한 전개는 행렬을 이용하여 많은 양의 자료를 괄호로 묶어 하나의 대상으로 나타내고 행렬의 곱셈을 적절히 정의함으로써 여러 변수가 포함된 자료 사이의 관계를 마치 일차함수 $y=ax$ 처럼 표상한다는 점에서 수학적으로 의미 있는 접근이다(Smith, 2012). 실제로 이전 고등학교 수학 교과서는 연립일차방정식이나 선형변환과 행렬의 관계를 다룰 때 [그림 2]처럼 열 행렬 X를 A의 오른쪽에 곱하여 $AX=B$와 같이 제시하였으며 행 행렬을 A의 왼쪽에 곱하는 경우는 전혀 없었다.

두 개의 미지수 x, y에 대한 연립일차방정식

$$\begin{cases} ax+by=p \\ cx+dy=q \end{cases} \qquad \cdots\cdots \text{①}$$

를 행렬을 이용하여 풀어 보자.

연립일차방정식 ①을 행렬로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots \text{②}$$

여기서

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

로 놓으면 ②를 다음과 같이 간단히 나타낼 수 있다.

$$AX=B \qquad \cdots\cdots \text{③}$$

따라서 위의 연립일차방정식 ①의 해를 구하는 것은 ③을 만족하는 행렬 X를 구하는 것과 같다.

[그림 2] 연립일차방정식의 행렬 표현
(우정호 외, 2010, p. 40)

한편 [그림 1]처럼 열 행렬과의 곱셈을 위해 문제에 주어진 표의 구조를 조정한 예비교사 중 3명은 식재료의 전체 비용을 구하려면 각 재료의 가격에 대한 자료를 행 행렬$(12500\ 5200\ 7800\ 1400\ 1100)$로 표현하고 이를 [그림 1]에서 얻은 결과의 왼쪽에 곱하여 $(12500\ 5200\ 7800\ 1400\ 1100)\left\{\begin{pmatrix} 1.2 & 0 & 1.4 \\ 0 & 1.6 & 1.8 \\ 1.4 & 1.6 & 0 \\ 2.6 & 2.8 & 3 \\ 5.2 & 4.7 & 4.4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 14 \\ 16 \\ 18 \end{pmatrix}\right\}$로 처리해야 하지만, 각 식재료의 가격을 행 행렬$(12500\ 5200\ 7800\ 1400\ 1100)$ 로 나타내지 못하였다. 결국 이들은 문항 1의 일부 자료만 처리하고 식재료의 전체 비용을 얻는 데는 실패하였다(범주 Ⅱ).

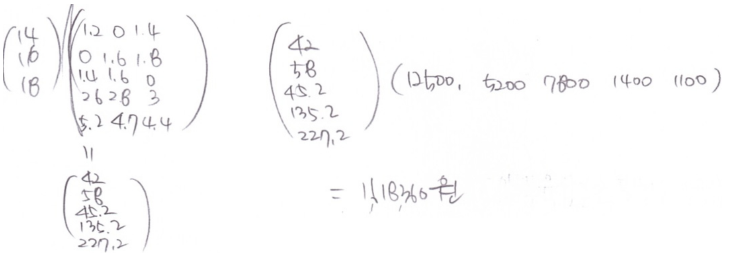
이상에 따르면 예비교사 중 일부는 여러 변수가 포함된 자료를 처리하는 수학적 아이디어를 행렬의 곱셈으로 표상할 때 열 행렬이 다른 행렬의 오른쪽에 곱해지도록 문제에 주어진 자료의 구조를 조정하는 SCK를 보였으며, 이러한 SCK는 실생활 자료를 표현하고 처리하는 수학적 모델링의 도구로 행렬을 유의미하게 사용하는 데 제한적일 수 있다. 이는 다양한 사례를 통해 자료를 표현, 이해, 처리하는 과정을 경험하도록 한 2022 개정 교육과정의 행렬 교수-학습 목표가 수업에서 구현되려면 행렬 표상과 관련하여 예비교사들이 지닌 SCK를 개선하는 방안이 우선적으로 모색되어야 함을 시사한다.

수학 내외의 자료를 표현 및 처리하는 모델링 수단으로 행렬의 의미를 강조하는 국외 교과서는 행 행렬과 열 행렬을 적극적으로 다루어, 행렬의 연산을 활용하여 문제에서 요구하는 새로운 정보를 쉽게 얻을 수 있도록 한다(이경화, 김하림, 이송희, 2022). 이와 같은 국외 교과서 사례에 비추어, 대학 수학 교재나 고등학교 교과서에서 행 행렬과 열 행렬을 이용하는 행렬의 곱셈을 다양한 맥락으로 경험하는 기회를 제공할 필요가 있다.

나. 행렬의 곱셈을 이용하여 실생활 맥락의 자료를 처리하는 데 한계가 있으며, 그 교수-학습 의의를 인식하지 못한다.

행렬이 2022 개정 교육과정에 도입된 의도(이경화 외, 2022)를 고려하면, 행렬의 곱셈을 개념적으로 다루어 실생활 맥락의 자료를 처리하고 그 교수-학습의 의의를 적절히 인식하는 SCK가 행렬 교수 활동에 요구된다. 그러나 예비교사 16명은 문항 1의 자료 처리에 행렬의 곱셈을 오용하여(범주 Ⅲ) '곱셈이 정의되지 않는 행렬을 이용'하거나 '행렬의 곱셈을 행의 실수배' 또는 '대응하는 성분의 곱'으로 계산하였으며, 주어진 자료를 처리하는 모델로는 적합하지 않은 '2×2 행렬을 이용'하였다.

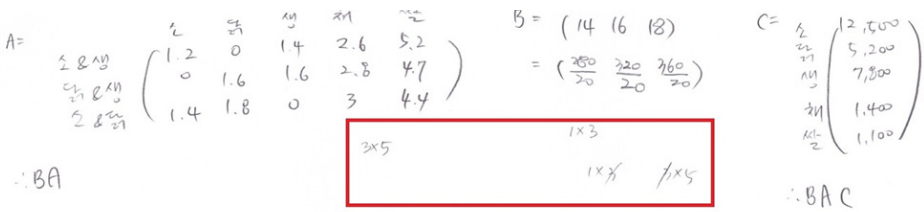
범주 Ⅲ의 예비교사 8명은 행렬의 곱셈이 정의되지 않음에도 [그림 3]과 같이 3×1행렬$\begin{pmatrix}14\\16\\18\end{pmatrix}$을 5×3행렬$\begin{pmatrix}1.2 & 0 & 1.4\\0 & 1.6 & 1.8\\1.4 & 1.6 & 0\\2.6 & 2.8 & 3\\5.2 & 4.7 & 4.4\end{pmatrix}$의 왼쪽에 곱하여 얻은 결과를 5×1행렬로 표현하였으며, 이를 1×5행렬 $(12500\ 5200\ 7800\ 1400\ 1100)$의 왼쪽에 곱한 결과를 1×1로 잘못 나타내었다.



[그림 3] 곱셈이 정의되지 않는 행렬을 이용한 예비교사 답변 사례

행렬의 곱셈을 이용하여 자료를 바람직하게 처리한 모든 예비교사는(범주 Ⅰ) 주어진 자료를 행렬로 표현한 다음 [그림 4]의 $\boxed{}$와 같이 행렬의 크기를 살펴 그 곱셈을 수행하고 결과도 추측하는 전략을 사용하였다. 이는 실생활 자료를 표현 및 처리하는 모델링 도구로 행렬을 이용하는 데 행렬의 곱셈이 정의되는 조건을 확인하는 과정이 주요한 발견 전략이 됨을 보여준다.[9]

9) 같은 전략을 [그림 1]의 하단에서도 볼 수 있다.



[그림 4] 행렬의 곱셈을 이용하여 자료를 바람직하게
처리한 예비교사 답변 사례10)

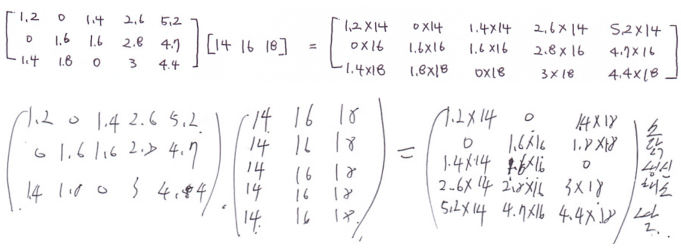
행렬을 모델링 수단으로 활용하는 데 주목하는 싱가포르와 호주 교과서는 곱셈이 정의되는 조건을 강조하기 위해 이를 학생들끼리 토론하여 음미하는 기회를 부여한다(이경화, 김하림, 이송희, 2022). 특히 호주의 고등학교 졸업 자격시험인 VCE(Victorian Certificate of Education)에는 [그림 5]처럼 행렬의 연산이 정의되는지 묻는 문제가 자주 출제된다. 이상에 따르면 행렬의 곱셈이 정의되는 조건이 2022 개정 교육과정의 행렬 교수-학습에서 갖는 교수학적 의의를 적극적으로 논의해 볼 필요가 있다.

A is a 7×7 matrix.
B is a 10×7 matrix.
Which one of the following matrix expressions is defined?

A. $AB - 2B$ **D.** $A^2 - BA$
B. $A(BA)^{-1}$ **E.** $A(B^T)$
C. AB^2

[그림 5] 행렬의 연산이 정의되는지 묻는 호주 고등학교
졸업 자격시험 문제(VCE, 2021, p.20)

이외에도 범주 Ⅲ의 예비교사 6명은 [그림 6]처럼 '행렬의 곱셈을 행의 실수배' 또는 '대응하는 성분의 곱'으로 계산하였다.

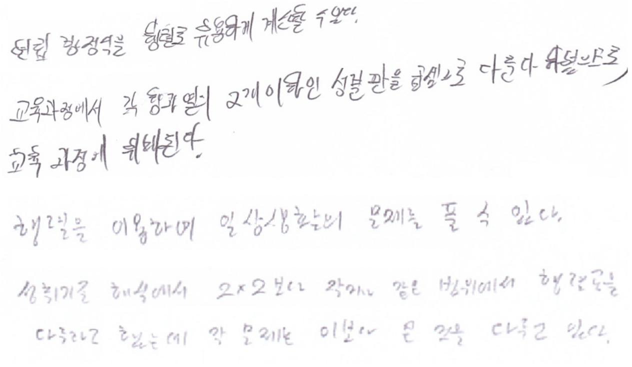


[그림 6] 행렬의 곱셈을 행의 실수배(위) 또는
대응하는 성분의 곱(아래)으로 계산한 예비교사 답변 사례

10) 빨간 상자는 본 연구에서 설명을 위해 추가한 것이다.

[그림 6]의 예비교사들은 선형대수 Ⅰ, Ⅱ를 우수한 성적으로 이수하였으며 수학적인 맥락에서는 행렬과 그 연산을 탐구하는 데 전혀 문제가 없었다. 그럼에도 불구하고 이들이 [그림 6]처럼 행렬의 곱셈을 활용하여 실생활 맥락의 자료를 처리하는 데 한계를 보인 것은 학문적인 수학을 배운 것만으로는 이를 응용 상황에 적용하여 수업에서 적합한 방식으로 지도하는 교사 역량이 개발되지 않을 수 있음을 보여준다(Figueiras et al., 2011). 또한 범주 Ⅳ의 예비교사 10명은 문항 1이 행렬과 그 연산을 이용하는 방법에 대해 구체적으로 설명하도록 요구하였음에도 행렬을 전혀 이용하지 않고 문제 해결을 시도하였다. 이상에 따르면 연구대상 34명 중 26명이 행렬 및 그 곱셈을 통해 실생활 맥락의 자료를 표현하고 처리하는 데 어려움을 보인바, 수학적 모델링 도구로 행렬을 다루는 예비교사들의 SCK에 적지 않은 한계가 있음을 보여준다(S2).

한편 문항 2의 답변에서 예비교사 28명은 문항 1이 행렬 교수-학습에서 갖는 한계를 지적하였으며, 특히 문항 1의 범주 Ⅲ, Ⅳ에 속한 예비교사 중 21명은 '행렬을 이용하지 않아도 풀 수 있다'(12명), '행렬의 편리성을 알 수 없다'(5명), '계산이 복잡하다'(4명)와 같이 기술하여 그 의의를 인식하지 못하는 모습을 보였다(S3). 이는 문항 1의 범주 Ⅰ에 속한 예비교사 중 4명이 행렬 교수-학습에서 문항 1이 지닌 의의와 한계를 [그림 7]과 같이 모두 기술한 것과는 대조를 이룬다.



[그림 7] 문항 2에 대한 예비교사 답변 사례 1, 2

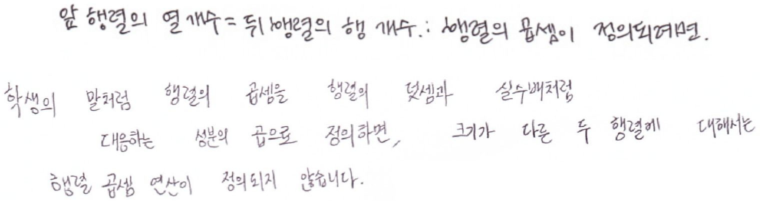
나아가 문항 1의 범주 Ⅰ에 속한 예비교사 중 3명은 "행과 열의 개수가 각각 2를 넘지 않는 범위에서 행렬의 곱셈을 다루도록"(교육부, 2022, p. 63) 명시한 2022 개정 교육과정의 성취기준 해설에 비추어 [그림 7]과 같이 문항 1의 한계를 지적하였다. 행렬을 이용하여 자료 모두를 바람직하게 처리한 예비교사는 행렬 교수-학습에 실생활 맥락의 과제가 필요한지 여부로 그 한계를 지적하기보다 "여러 값이 포함된 자료는 행렬 표현과 연산을 통해 효율적으로 처리된다"(교육부, 2022. p. 59)는 핵심 아이디어를 행렬 교수-학습에서 구현하는 것을 전제로, 수업에 쓰일 실생활 과제의 질을 교육과정에 비추어 평가하는 특징을 보인바, 핵심 아이디어와 관련된 교육과정 실행의 하향식 모델(송창근, 이경화, 2023)의 사례가 범주 Ⅰ의 예비교사들에게서 드러났다.

2. 행렬에 대한 예비교사들의 HCK

가. 행렬의 곱셈이 정의되는 이유를 행렬의 곱셈이 정의되는 조건이나 행렬의 크기에 비추어 설명한다.

교사는 대학 수학을 통해 학문적 수학을 경험함으로써 가르칠 수학 이면에 존재하는 구조를 이해하게 되며 학교 수학을 폭넓은 수학적 견지에서 조망하는 HCK를 개발한다(Ball & Bass, 2009). Mellone 외(2015)에 따르면 풍부한 HCK를 지닌 교사는 학생의 예상치 못한 질문이나 의견에 수학적으로 적절하게 대처할 수 있다. 그러나 문항 3에서 예비교사 13명은 행렬의 곱셈을 특정 방식으로 정의하는 이유를 묻는 학생에게 ‘행렬의 곱셈이 정의되는 조건’(범주 Ⅱ)이나 ‘행렬의 크기’(범주 Ⅲ)와 관련된 설명을 제시하였으며, 이는 행렬의 곱셈 정의 자체를 그대로 기술한 것과 큰 차이가 없었다.

[그림 8]과 같이 예비교사 5명은 ‘행렬의 곱셈이 정의되려면 앞 행렬의 열과 뒤 행렬의 행의 개수가 같아야 한다’고 하였으며, 8명은 ‘학생의 말처럼 행렬의 곱셈을 정의하면 크기가 다른 행렬의 곱셈은 할 수 없다’는 답변을 제시하였다.



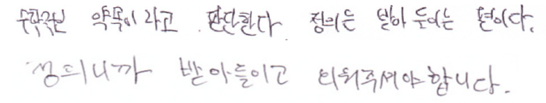
[그림 8] 문항 3에 대한 예비교사 답변 사례 1, 2

[그림 8]의 기술은 행렬의 곱셈이 특정 방식으로 정의되는 이유를 설명한 것이라기보다 행렬의 곱셈은 앞뒤 행렬이 어떤 조건을 만족하거나 그 크기가 다를 때도 정의할 수 있어야 하는데, 대응하는 성분의 곱으로 정의하면 그러한 조건을 만족할 수 없으므로 학생처럼 하면 안된다는 답변에 불과하다. 이는 행렬의 곱셈 정의에 대한 이유를 설명하는 대신 행렬의 정의 자체를 그대로 기술하여 학생의 의견이 바람직하지 않음을 알려주는 데 주목한 것으로(H1), 행렬의 곱셈이 지닌 수학적 의미에 비추어 학생의 의견을 적절히 다루는 예비교사들의 HCK에 한계가 있음을 보여준다.

Even & Tirosh(1995)에 따르면 수학에서 어떤 내용이 성립하는 이유를 정의나 규칙에 기대어 그대로 진술하는 식으로 설명하는 교사는 수학을 임의적인 공리 및 정의와 그로부터 만들어진 규칙의 체계로 보는 경향이 있으며 수학 학습도 이러한 공리, 정의, 규칙을 숙지하고 암기하여 활용하는 데 목표를 두는 경우가 많다. 이는 문제 3의 범주 Ⅱ, Ⅲ에 속한 예비교사들이 행렬의 곱셈을 수학적 탐구 활동의 결과가 아니라 임의적 규약과 지켜야 할 계산 규칙 정도로 이해하고 있을 가능성을 시사한다.

나. 행렬의 곱셈 정의를 단순히 약속이라고 생각한다.

앞서 예비교사들이 행렬의 곱셈을 임의적인 규약으로 인식하고 있을 가능성이 드러났다. 실제로 문항 3에서 예비교사 8명은 행렬의 곱셈이 특정 방식으로 정의되는 이유를 행렬의 곱셈 정의가 지닌 의미와는 무관하게 수학에서 ‘정의는 약속이며 따라서 외워야 한다’고 설명하였다(범주Ⅰ). 또한 문항 3에서 범주 Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ에 속한 예비교사 중 각각 3명, 2명, 3명은 문항 4에 대해 [그림 9]와 같이 자기 자신도 ‘정의는 수학적인 약속이므로 받아들이는 편’이라고 답하거나 수학 전공자에게도 ‘정의니까 받아들이고 외워야 한다’고 설명하겠다는 답변을 하였다. 예비교사 상당수가 행렬의 곱셈 정의를 목적이 있는 탐구 활동의 결과라기보다 임의적인 약속으로 인식하는 경향이 있다(H2).



[그림 9] 문항 4에 대한 예비교사 답변 사례 1, 2

정의의 의미와 본질을 이해하는 것은 수학적인 활동의 토대가 되며 수학의 구조가 만들어지는 과정을 경험하는 데 기여한다(Tall, 2013). Robin, Fuller, & Harel(2013)는 수학에서 개념이나 연산을 특정 방식으로 정의하는 데는 그럴만한 이유가 있으나, 수학을 전공한 대학생들조차도 이를 충분히 이해하지 못하는 경우가 많다. Fischbein(1993)에 따르면 수학은 인간 활동이며 이를 통해 정의가 만들어지므로, 정의의 이면에 존재하는 사고를 아는 것은 인간 활동으로서 수학의 본질을 이해하는 데 주요하다.

수학 개념이나 연산이 정의되는 의도나 그 이면의 사고가 교수학적 상황에서 다루어지지 않는다면, 학생들은 수학을 임의적인 정의와 규칙의 더미로 밖에 느끼지 못할 것이다(Even & Tirosh, 1995). 교사는 가르칠 지식인 수학 개념이나 연산이 정의되는 이유를 다른 수학적 대상과 연결하여 깊이 있게 이해할 필요가 있으며(Montes et al., 2016; Vale et al., 2011), 이를 적절히 조직하여 수학적 모델의 타당성을 입증할 수 있어야 한다(Shulman, 1986). 이를 통해 교사는 개념적으로 연결된 다양한 표상을 활용하여 수학적으로 의미 있는 수업을 진행할 수 있다(Turner & Rowland, 2011)

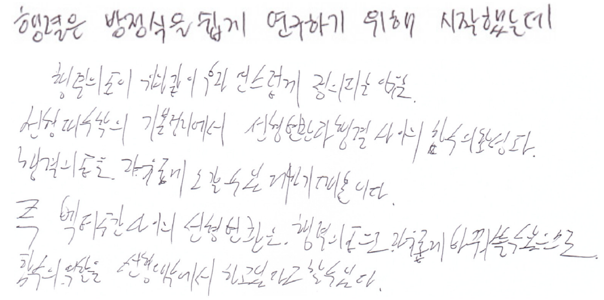
본 연구에서 적지 않은 예비교사가 행렬의 곱셈을 [그림 9]처럼 단순한 약속으로 파악하고 이를 공식화하여 암기하도록 다루겠다고 한 것이나, 문항 3, 4에 대해 각각 13명, 17명이 답변 자체를 하지 못한 것은 행렬의 곱셈을 폭넓은 수학적 견지에서 조망하여 수학적인 탐구 활동의 결과로 인식하는 예비교사의 HCK에 한계가 있음을 보여준다. 정영우 외(2011)에 따르면 수학교사는 지도하는 내용에 대해 아는 것을 넘어 가르칠 지식인 수학이 왜, 어떻게 만들어지고 발전되어 왔는지 그 이면의 사고도 볼 수 있어야 한다.

행렬의 곱셈 정의를 단순히 계산 기술로서가 아니라 수학적인 탐구 활동에서 문제 상황을 단순화하기 위해 창안된 수학적 도구로 인식하는 HCK는 2022 개정 수학과 교육과정에 명시된 핵심 아이디어인 “여러 값이 포함된 자료는 행렬 표현과 연산을 통해 효율적으로 처리된다”(교육부, 2022, p. 59)를

행렬 교수-학습에서 실제로 구현하는 데도 필요한 교사 지식이다. 구체적인 학습 요소에 대해 교사가 지닌 내용 지식 및 인식은 교사의 수업 실행에 직접적인 영향을 미쳐 학생의 수학 학습을 결정짓는 중요한 요소 중 하나로 작용하는바(Guberman & Gorev, 2015), 2022 개정 수학과 교육과정의 의도가 행렬 교수-학습에 의미 있게 반영되려면 행렬의 곱셈을 목적이 있는 탐구 활동의 성과로 보는 예비교사들의 HCK를 개발하는 데 좀 더 주목할 필요가 있다. 수학교사 양성기관의 선형대수 강좌는 행렬 및 그 연산의 이면에 담긴 수학적 사고를 예비교사들이 구체적으로 경험할 수 있도록 하는 교수학적 전략을 적극적으로 모색하여야 한다.

다. 일부 예비교사는 행렬과 그 연산이 지닌 수학적 의미를 연립방정식, 선형변환과 관련하여 인식한다.

Vale 외(2011)는 HCK의 특징을 대학 수학 내용과 관련하여 설명한바, 본 연구는 행렬과 그 연산이 지닌 수학적 의의에 대한 예비교사들의 인식을 직접적으로 파악하고자 문항 4에서 행렬의 곱셈이 특정 방식으로 정의되는 이유를 수학 전공자에게는 어떻게 설명하겠는지 답하도록 하였다. 이에 대해 각각 예비교사 2명은 [그림 10]과 같이 연립일차방정식 및 선형변환과 관련된 설명을 제시하였다(H3).



[그림 10] 문항 4에 대한 예비교사 답변 사례 1, 2

대학 선형대수 교재(Hefferon, 2020)가 행렬의 곱셈을 연립일차방정식 및 선형변환의 합성과 관련하여 직접적으로 다룸에도, 일부 예비교사만이 행렬과 그 연산의 수학적 의미를 연립일차방정식이나 선형변환에 비추어 설명한 이상의 결과는 대학 수학을 통해 해당 개념을 배운 것만으로는 문항 3과 같은 수업 상황에서 학생이 제기하는 의견에 수학적으로 적절하게 대처하는 것이 보장되지는 않음을 보여준다. 즉, 교사의 HCK가 대학 수학을 통해 개발될 수 있다 할지라도(Ball & Bass, 2009; Vale et al., 2011), 이는 전공 강의를 수강하는 것만으로는 충분치 않으며 수학의 개념, 절차, 성질 등을 의식적으로 연결하여 해석해 보는 교수학적 노력을 요구한다(Montes et al., 2016).

실제로 Figueiras 외(2011; Lavy & Shriki, 2010)은 학교 수학에서 다루는 개념의 정의를 알고 그 내용을 기술할 수 있는 교사라 할지라도 해당 정의의 수학적 의미와 본질을 이해하지 못하는 경우가

많다고 보고한바, 본 연구의 예비교사 중 상당수도 선형대수를 통해 행렬과 그 곱셈을 연립일차방정식 및 선형변환과 관련하여 학습하였지만 실제로 이들 개념을 연결하여 그 의미의 본질을 파악하는 데 어려움을 보였다. 행렬의 곱셈이라는 학교 수학의 내용을 대학 수학에 비추어 이해하고 이를 수학적 견지에서 조망하는 예비교사들의 HCK를 개발하기 위해서는 행렬과 그 연산의 본질을 연립일차방정식 및 선형변환과 관련하여 의식적으로 탐색하는 기회를 대학의 전공 강좌에서 제공할 필요가 있다.

V. 결 론

본 연구는 교사가 교육과정을 해석하고 수학 개념에 대한 설명을 구체화하는 데 핵심적인 역할을 하는 SMK의 하위 요소인 SCK와 HCK에 비추어 행렬에 대해 예비교사들이 지닌 지식의 특징을 분석함으로써 새로운 행렬 교수-학습을 실행하는 데 요구되는 교사 전문성 개발에 의미 있는 정보를 얻고자 하였다. 이하에서는 본 연구를 통해 드러난 예비교사들의 행렬에 대한 SCK와 HCK 특징을 교사 교육에의 시사점 및 행렬 교수-학습의 쟁점과 관련하여 기술함으로써, 지능 정보화 시대를 대비하는 수학교육을 위해 교사 양성기관의 전공 강좌와 학교 수학에서 행렬과 그 연산을 다룰 때 주목할 필요가 있는 측면을 제언하고자 한다.

본 연구에서 예비교사들은 여러 변수가 포함된 실생활 자료를 행렬로 표현 및 처리하거나 그 교수학적 의의를 인식하는 데 제한적인 SCK를 보였다. 수학적 아이디어를 행렬의 곱셈으로 표상할 때 열 행렬을 다른 행렬의 오른쪽에 곱하기 위해 주어진 자료의 구조를 일부러 조정하였으며, 행 행렬을 다른 행렬의 왼쪽에 곱하는 등의 유연한 접근을 고려하지 못하였다. 또한 행렬의 곱셈을 이용하여 실생활 자료를 처리하는 데 곱셈이 정의되지 않는 행렬을 이용하거나, 행렬의 곱셈을 행의 실수배 또는 대응하는 성분의 곱으로 잘못 계산하는 한계를 보였다. 예비교사 중 상당수는 실생활 맥락의 자료를 처리하는 데 행렬과 그 연산을 전혀 활용하지 않았으며, 이러한 접근이 행렬 교수-학습에 지닌 의의를 파악하지 못하였다. 이상에 따르면 2022 개정 수학과 교육과정이 추구하는 행렬 교수-학습의 목표를 실행할 예비교사들의 SCK에 여러 한계가 있는바, 대학의 교사 교육과정에서 수학 내외적 맥락의 자료를 표현하고 처리하는 수학적 도구로 행렬과 그 연산의 의미를 강조하여 다루는 구체적인 방안의 모색이 절실하다고 볼 수 있다.

한편, 본 연구는 행렬에 대한 예비교사들의 SCK의 특징을 분석하는 과정에서 행렬이 지닌 수학적 모델로서의 가치를 강조하는 국외 교과서는 다양한 실생활 자료를 행렬로 표현하여 처리할 수 있도록 행 행렬과 열 행렬을 학교 수학의 주요 학습 요소로 다룸을 확인하였다. 또한 본 연구에서 실생활 맥락의 자료를 행렬과 그 곱셈을 이용하여 바람직하게 다룬 예비교사들은 행 행렬과 열 행렬로 실생활 자료를 표현하고 처리할 때 행렬의 곱셈이 정의되는 조건을 문제 해결의 발견 전략으로 활용하였다. 나아가 이들은 실생활 맥락의 과제가 행렬 교수-학습에 지닌 의의와 한계를 행렬과 관련된 핵심 아이디어를 전제로 교육과정의 성취기준에 비추어 설명하는 모습을 보였다. 이는 대학의 교사 교육과정이나

2022 개정 수학과 교육과정의 행렬 지도에서 행 행렬과 열 행렬 및 행렬의 곱셈이 정의되는 조건의 역할과 가치를 좀 더 직접적으로 다룰 필요가 있으며, 특히 예비교사들의 SCK를 개발하는 데 핵심 아이디어와 관련된 교육과정 실행의 하향식 모델(송창근, 이경화, 2023)을 활용하는 방안을 모색하는 후속 연구가 필요함을 시사한다.

본 연구의 예비교사들은 행렬과 그 연산이 지닌 수학적 사고의 본질을 인식하거나 행렬의 곱셈을 목적이 있는 수학적 탐구 활동의 성과로 보는 HCK가 다소 부족하였다. 예비교사들은 행렬의 곱셈이 특정 방식으로 정의되는 이유를 묻는 문항에 행렬의 곱셈에 대한 정의 자체를 그대로 기술한 것과 다를 바 없는 답변을 제시하였으며, 예비교사 상당수는 행렬의 곱셈 정의를 임의적인 규약으로 인식하고 그저 받아들여 암기할 대상으로 파악하는 모습을 보였다. 이러한 이유로 행렬과 그 연산이 지닌 의미를 연립일차방정식이나 선형변환과 관련하여 설명한 예비교사는 일부에 불과하였다. 행렬의 곱셈 정의를 연립일차방정식이나 선형변환과 같은 수학적 대상을 탐구하는 과정에서 문제 상황을 단순화하기 위해 창안된 도구로 인지하는 HCK는, 여러 값이 포함된 복잡한 자료를 행렬 표현과 연산으로 단순화하여 효율적으로 처리하는 과정을 다루도록 한 교육과정의 핵심 아이디어(교육부, 2022)와 밀접하게 연관된다. 이상에 따르면 2022 개정 수학과 교육과정의 행렬 교수-학습의 의도가 실제 수업에서 구현되려면 행렬과 그 곱셈의 수학적 의미와 본질을 인식하고 이해하는 예비교사들의 HCK 개발이 시급하다.

Tall(2013)에 따르면 대학에서 학문적인 고등 수학을 학습하였더라도 이와 관련된 사고의 본질을 인식하는 능력이 자연스럽게 개발되는 것은 아니다. 이는 교사 교육 강좌에서 행렬과 그 연산을 다루는 방식이 정의를 제시하는 것에서 수학적 의미를 명시적으로 논의하는 맥락으로 전환될 필요가 있으며 한편으로는 고등학교 수학 교과서 전개 방식에도 대안적인 접근이 요구됨을 시사한다. 수학 교과서는 교사가 수업을 설계하거나 실행하는 데 영향을 미치는 주요 외적 요인 중 하나로, 특정 내용을 다루는 교과서 전개 방식은 해당 내용에 대한 교사의 이해 또는 수업을 위한 의사결정에 적지 않은 영향을 미치기 때문이다(Matić & Grancin, 2016; Remillard, Harris, & Agodini, 2014; Fan, 2013).

여러 연구(신보미 외, 2000; 조성민, 2009; 정영우 외, 2011)는 행렬과 그 연산을 지도하는 대안으로 행렬 개념의 발생적 본질에 따른 교수-학습 방안을 제안하였다. 이들은 역사적으로 행렬 개념 발생에 주요한 역할을 한 연립일차방정식과 선형변환을 행렬 도입과 그 연산 정의에 적극적으로 활용하도록 강조한바, 이는 행렬과 그 연산을 다루는 교사 교육 강좌 및 고등학교 수학 교과서에 대한 개선 방향을 모색하거나 수학 교사가 행렬과 관련하여 느끼는 이중 단절 문제를 해결하고자 하는 후속 연구에 의미 있는 정보를 제공한다.

참고문헌

교육부(2021). **2022 개정 교육과정 총론 주요 사항(시안)**. 교육부.

교육부(2022). **수학과 교육과정**. 교육부.

권오남, 김아미, 조형미(2012). 한국 사범대학 수학교육과의 교육과정 및 교수방법 분석. **수학교육, 51**(3), 281-300.

권현경(2007). 행렬의 응용성에 대한 고찰. 석사학위논문, 성균관대학교.

김래영, 김은현(2017). 교원양성교육과정과 교원임용후보자 선정경쟁시험에 나타난 중등수학 교사에게 요구되는 지식 분석: 교수를 위한 내용 지식을 중심으로. **교과교육학연구, 21**(5), 610-623.

김홍겸(2021). 인공지능 리터러시를 위한 고등학교 수학 교육내용 개정 방향 연구. **교육문화연구, 27**(3), 245-264.

박경미(2009). 수학의 교수학적 내용 지식(PCK)에 대한 연구의 메타적 검토. **수학교육, 48**(1), 93-105.

박경미 외(2015). **2015 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정 시안 개발 연구 Ⅱ**. 한국과학창의재단.

방정숙, 선우진(2014). 수학교사교육에 관한 국내 연구의 동향 분석. **학교수학, 16**(2), 335-353.

송근영, 방정숙(2013). 수학과 교사지식에 관한 국내 연구의 동향 분석. **한국학교수학회논문집, 16**(1), 265-287.

송창근, 이경화(2023). 수학과 교육과정에서의 빅 아이디어 접근의 이해와 실행 모델 탐색. **수학교육학연구, 33**(1), 101-122.

신보미, 박종률, 임재훈(2000). 행렬 도입 및 연산 지도의 대안적 방법. **과학교육연구지, 24**(1), 71-81.

신이섭 외(2011). **2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정 연구**. 한국과학창의재단.

양선아, 이수진(2019). 학교 수학과 대학 수학 사이의 연계성에 대한 중등교사의 전문성 분석-대학 수학에 대한 인식과 대수 영역에 대한 MKT를 중심으로-. **학교수학, 21**(2), 419-439.

우정호 외(2010). **고등학교 수학Ⅰ**. 두산동아.

이경화 외(2022). **2022 개정 수학과 교육과정 시안(최종안) 개발 정책연구**. 한국과학창의재단.

이경화, 김하림, 이송희(2022). 한국, 싱가포르, 호수 수학 교과서의 행렬 단원 비교. **학교수학, 24**(1), 57-88.

이상구 외(2020). **2015 개정 수학과 교육과정 인공지능 수학 과목 시안 개발 연구**. 한국과학창의재단.

정영우, 김부윤, 황종철, 김소영(2011). 행렬의 연산을 통해 본 일대일 대응의 의미에 관한 고찰. **학교수학,** 13(3), 405-422.

조성민(2009). 역사발생적 관점에서 본 행렬 지도의 재음미. **한국학교수학회논문집,** 12(1), 99-114.

허남구(2020). 인공지능 소재 R&E 프로그램 운영을 통한 인공지능 학습을 위한 중등 수학 교과 지식 분석. **학습자중심교과교육연구.** 20(16), 673-689.

Ball, D., Hill, H., & Bass, H. (2005). Who knows mathematics well enough to teach third grade and how can we decide? *American Educator, 29*(1), 14-46.

Ball, D., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Ball, D., & Bass, H. (2009). With an eye on the mathematical horizon: Knowing mathematics for teaching to learners'mathematical futures. *Paper presented at the 2009 Curtis center mathematics and teaching conference*, LA: University of California.

Ding, M. (2008). Teacher knowledge necessary to address student errors and difficulties about equivalent fractions. In G. Kulm (Ed.), *Teacher knowledge and practice in middle grades mathematics* (pp. 147-171). Rotterdam, Netherlands: Sense.

Dorier, J. L. (2002). Epistemological analysis of the genesis the theory of vector spaces. In J. L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra* (pp. 3-81). Kluwer Academic Publishers.

Even, R. & Tirosh, D. (1995). Subject matter knowledge and knowledge about students as sources of teacher presentations of the subject matter. *Educational Studies in Mathematics, 29*(1), 1-20.

Fan, L. (2013). Textbook research as scientific research: Towards a common ground on issues and methods of research on mathematics textbooks. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education, 45,* 765-777.

Figueiras, L., Ribeiro, M., Carrillo, J., Fernández, S., & Deuloffeu, J. (2011). Teachers' advanced mathematical knowledge for solving mathematics teaching challenges: A response to Zazkis and Mamolo. *For the Learning of Mathematics, 31*(3), 26-28.

Fischbein, E. (1993). The interaction between the formal, the algorithmic and the intuitive components in a mathematical activity. In R. Biehler, R. Scholz, R. Straber, & B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 231-245). Dordrecht: Kluwer.

Guberman, R. & Gorev, D. (2015). Knowledge concerning the mathematical horizon: A close view. *Mathematics Education Research Journal, 27*, 165-182.

Hefferon, J. (2020). *Linear algebra*. Orthogonal Publishing L3C.

Klein, F. (1932). *Elementary mathematics from an advanced standpoint: Arithmetic, algebra, analysis* (Vol. 1. E. R. Hedrick & C. A. Noble trans.) NY: Macmillan. (Original work published 1924).

Lavy, I. & Shriki, A. (2010). Engaging in problem posing activities in a dynamic geometry setting and the development of prospective teachers' mathematical knowledge. *Journal of Mathematical Behavior, 29*, 11-24.

Levenson, E. (2012). Teachers' knowledge of the nature of definitions: The case of the zero exponent. *Journal of Mathematical Behavior, 31*, 209-219.

Ma, L. (1996). *Profound understanding of fundamental mathematics: What is it, why is it important, and how is it attained?* Unpublished doctoral dissertation, Stanford: Stanford University.

Magiera, T. M., van den Kieboom, A. L., & Moyer, C. J. (2011). Relationships among features of pre-service teachers' algebraic thinking. In B. Ubuz (Ed.), *Proc. 35th conf. of the Int. group for the psychology of mathematics education* (Vol. 3, pp. 169-176). Ankara, Turkey: PME.

Matić, L. J. & Grancin, D. G. (2016). The use of the textbook as an artefact in the classroom: A case study in the light of a socio-didactical Tetrahedron. *Journal für Mathematik-Didaktik, 37*(2), 349-374.

Mellone, M., Jakobsen, A., & Ribeiro, C. M. (2015). Mathematics educator transformation(s) by reflecting on students' non-standard reasoning. In K. Krainer & N. Vondrova (Eds.), *Proceedings of CERME 9* (pp. 2874-2880). Prague: ERME

Montes, M., Riberiro, M., Carrillo, J., & Kilpatrick, J. (2016). Understanding mathematics from a higher standpoint as a teacher: An unpacked example. In C. Csikos, A. Rausch, & J. Szitányi (Eds.), *Proceedings of the 40*th *conference of the international group of the psychology of mathematics education,* Vol. 3 (pp. 351-322). Hungary: PME.

Remillard, J. T., Harris, B., & Agodini, R. (2014). The influence of curriculum material design on opportunities for student learning. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education, 46*(5), 735-749.

Robin, M. J., Fuller, E., & Harel, G. (2013). Double negative: The necessity principle, commognitive conflict, and negative number operations. *Journal of Mathematical Behavior, 32*, 649-659.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15,* 4-14.

Smith, L. (2012). *Linear algebra*. Springer.

Tall, D. (2013). *How humans learn to think mathematically: Exploring the three worlds of mathematics.* New York: Cambridge University Press.

Turner, F. & Rowland, T. (2011). The knowledge Quartet as an organising framework for developing and deepening teachers' mathematics knowledge. In T. Rowland & K. Ruthven (Eds.) *Mathematical knowledge in teaching* (pp. 195-212). London and New York: Springer.

Vale, C., McAndrew, A, & Krishnan, S. (2011). Connecting with the horizon: Developing teachers' appreciation of mathematical structure. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*, 193-212.

Victorian Certificate of Education(2021). *Further mathematics: Written examination 1.* https://www.vcaa.vic.edu.au/Documents/exams/mathematics/2021/2021furmath1-w.pdf (검색일: 2023.05.15.)

Watson, J., Beswick, K., & Brown, N. (2006). Teachers' knowledge of their students as learners and how to intervene. In P. Grootenboer, R. Zevenbergen, & M. Chinnappan (Eds.), *Identities, cultures and learning spaces: Proceedings of the 29*th *annual conference of the mathematics education research group of Australasia* (pp. 551-558). Adelaide: MERGA.

Zazkis, R., & Marmur, O. (2018). Groups to the rescue: Responding to situations of contingency. In N. H. Wasserman (Ed.), *Connecting abstract algebra to secondary mathematics for secondary mathematics teachers.* (pp. 363-387). NY: Springer.

· 논문접수 : 2023.07.05. / 수정본접수 : 2023.07.28. / 게재승인 : 2023.08.09.

ABSTRACT

An Analysis on Prospective Mathematics Teachers' Subject Matter Knowledge about Matrix

Yeansu Kim
Professor, Chonnam National University
Bomi Shin
Professor, Chonnam National University

Matrix has included at 2022 revised mathematics curriculum as a part of restructuring future-oriented learning contents for the age of artificial intelligence. In addition, the curriculum valued the meaning of matrix as a useful means of expressing and processing data from various contexts. The aim of this study was to deduce implications for enhancing mathematics prospective teachers' professionalism for effective instruction about matrix in the light of the intention of the curriculum. In order to accomplish the aim, this study identified features of SCK, HCK as components of SMK and ascertained the nature of matrix and matrix multiplication by examining the previous literature. A questionnaire was developed with reference to the features of SCK, HCK and taken by 34 mathematics prospective teachers. By analyzing the data obtained from the written responses the participants presented, this study delineated the specific characteristics of the teachers' SMK related to matrix. Additionally, several issues in teacher education for improving SMK with regard to matrix multiplication were discussed and the results of this research could provide inspiration for designing and implementing a teacher education program for developing SMK relevant to effectively teaching matrix as a useful means for mathematical modeling.

Key Words: *Teaching and learning matrix, Subject matter knowledge(SMK), Specialized content knowledge(SCK), Horizon content knowledge(HCK), 2022 revised curriculum*

〈부록〉 지필 검사 도구 (작성 영역 생략)

1. 어떤 식당에 3종류의 점심 특선 메뉴가 있다. 다음은 이 식당의 점심 특선 메뉴에 쓰이는 식재료의 양을 20인분 기준으로 작성한 것이다.

점심 특선 메뉴 이름	식재료의 양(단위 kg)				
	소고기	닭고기	생선	채소	쌀
소고기와 생선 특선	1.2	0	1.4	2.6	5.2
닭고기와 생선 특선	0	1.6	1.6	2.8	4.7
소고기와 닭고기 특선	1.4	1.8	0	3	4.4

(1) ‘소고기와 생선 특선’, ‘닭고기와 생선 특선’, ‘소고기와 닭고기 특선’을 각각 280인분, 320인분, 360인분을 준비하는 데 필요한 소고기, 닭고기, 생선, 채소, 쌀의 전체 양을 각각 구하기 위해 행렬과 그 연산을 이용하는 방법을 구체적으로 설명하시오.

(2) 소고기, 닭고기, 생선, 채소, 쌀의 1kg당 가격이 각각 12,500원, 5,200원, 7,800원, 1,400원, 1,100원일 때, 식재료를 준비하는 전체 비용을 구하기 위해 행렬과 그 연산을 이용하는 방법을 구체적으로 설명하시오.

2. 2022 개정 수학과 교육과정에서는 고등학교 1학년에서 행렬을 다루도록 하였다. 문제 1이 행렬 교수-학습에서 갖는 의의 또는 한계를 쓰시오.

3. 2022 개정 수학과 교육과정에서는 고등학교 1학년에서 행렬을 다루도록 하였다. 다음 대화에서 학생 A에게 어떤 설명을 제시하겠는지 자신이 교사라고 생각하고 구체적으로 작성하시오.

교사 : 행렬의 곱셈은 앞에 있는 행렬의 i행과 뒤에 있는 행렬의 j열의 성분을 차례로 곱해서 더한 것이 새로운 행렬의 i행 j열의 성분이 됩니다. 즉, 다음과 같이 정의합니다.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$$

학생 A : 선생님, 행렬의 덧셈과 실수배처럼 행렬의 곱셈을 다음과 같이 대응하는 성분의 곱으로 정의하면 왜 안되나요? 행렬의 곱셈을 대응하는 성분의 곱으로 정의하지 않고 선생님께서 설명하신 것처럼 정의하는 이유가 무엇인가요?

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ae & bf \\ cg & dh \end{pmatrix}$$

4. 문제 3에서 학생 A가 지적한 내용에 대해 교사로서 학생에게 설명한 방식은 실제 자신이 이해하고 있는 방식과 다를 수 있다. 만약 다르다면 자신은 이 문제를 어떻게 이해하고 있는지 설명하시오. 또, 수학을 전공한 사람에게는 이를 어떻게 설명하겠는지 작성하시오.